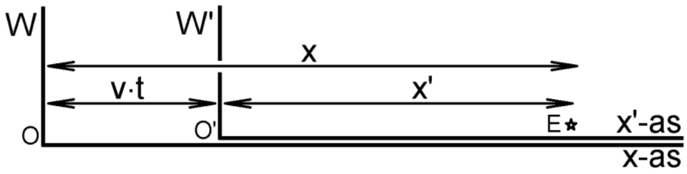
Alternatieve afleiding van de lorentz-transformatie, tijdsduurrek en lengtekrimp

Afleiding van de lorentztransformatie



In de figuur hiernaast beweegt waarnemer W’ ten opzichte van waarnemer W met een constante snelheid v naar rechts. W gebruikt de x-as en W’ de x’-as voor de plaatsbepaling. De oorsprong van de x-as is met O aangegeven en die van de x’-as met O’. Op het moment dat O en O’ samenvallen, zetten W en W’ hun tijd op nul.

Op het moment dat O en O’ samenvallen, wordt er van daaruit een lichtflits naar rechts uitgezonden. Na enige tijd is deze lichtflits op de positie E aangekomen. Symbolisch is dat met een sterretje in de figuur weergegeven. Voor W zijn de coördinaten van deze gebeurtenis x en t en voor W’ zijn ze x’ en t’. Omdat de lichtsnelheid c invariant is, geldt:

$$c = \frac{x}{t} \text{ en } c = \frac{x'}{t'} \qquad \text{(A1 en A2)}$$

We zoeken nu vergelijkingen waarmee x’ en t’ uit x en t berekend kunnen worden en omgekeerd. Deze vergelijkingen heten de lorentztransformatie. Ons startpunt is de (niet toereikende) galileï-transformatie, weergegeven door de onderstaande vergelijkingen B1 en B2.

$$x = x' + v \cdot t \quad \text{en} \quad x' = x - v \cdot t \qquad \text{(B1 en B2)}$$

Uit de vergelijkingen A1 en A2 volgt dat t en t’ van elkaar verschillen omdat x en x’ van elkaar verschillen terwijl c voor beide waarnemers gelijk is. De eerste aanpassing is daarom dat in vergelijking B1 de tijd t wordt vervangen door t’.

$$x = x' + v \cdot t' \quad \text{en} \quad x' = x - v \cdot t \qquad \text{(C1 en C2)}$$

Vergelijking C1 stelt de afstand tussen O en E volgens W gelijk aan de afstand tussen O en E volgens W’. Vergelijking C2 stelt de afstand tussen O’ en E volgens W’ gelijk aan de afstand tussen O’ en E volgens W. We moeten echter de mogelijkheid open houden dat afstandsbepalingen door W en W’ fundamenteel van elkaar verschillen (de tijdmetingen deden dat immers ook!). Daarom voegen we een correctiefactor γ aan de vergelijkingen C1 en C2 toe. Hierbij moet rekening gehouden worden met de symmetrie tussen W en W’; denk ook aan het eerste postulaat. Als W van W’ bijvoorbeeld vindt dat zijn afstand te klein is, zal W’ van W ook vinden dat zijn afstand te klein is. We krijgen dan:

$$x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t') \quad \text{en} \quad x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t) \qquad \text{(D1 en D2)}$$

We gaan nu de vergelijkingen A1, A2, D1 en D2 gebruiken om de lorentztransformatie af te leiden. Als we de linker en de rechter leden van D1 en D2 met elkaar vermenigvuldigen, krijgen we het volgende resultaat.

$$xx' = \gamma^2 \cdot (xx' + vxt' - vx't - v^2tt')$$

Als we alle termen van deze vergelijking delen door xx' krijgen we:

$$1 = \gamma^2 \cdot \left(1 + \frac{vt'}{x'} - \frac{vt}{x} - \frac{v^2tt'}{xx'}\right)$$

Met behulp van A1 en A2 kan dit geschreven worden als:

$$1 = \gamma^2 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} - \frac{v}{c} - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Hieruit volgt:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(E)}$$

Achteraf gezien is het dus terecht geweest om de factor γ in te voeren want bij grote snelheden v is γ duidelijk ongelijk aan 1.

Nu willen we een uitdrukking voor t' vinden.

Uit D1 volgt: $t' = \frac{x}{v \cdot \gamma} - \frac{x'}{v}$

Als we hierin D2 substitueren, krijgen we $t' = \frac{x}{v \cdot \gamma} - \frac{\gamma \cdot x}{v} + \gamma \cdot t$

Dit kan herschreven worden als: $t' = \gamma \cdot \left[t - \frac{x}{v} + \frac{x}{v \cdot \gamma^2}\right]$

Omdat $1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{v^2}{c^2}$ vinden we uiteindelijk:

$$t' = \gamma \cdot \left[t - \frac{v \cdot x}{c^2}\right] \qquad \text{(F)}$$

Samenvattend wordt de lorentztransformatie voor de volgende vergelijkingen gegeven.

Van W naar W': $x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ en $t' = \frac{t - \frac{v \cdot x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Van W' naar W: $x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ en $t = \frac{t' + \frac{v \cdot x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Lorentztransformatie van plaats- en tijdverschillen

Stel dat er twee gebeurtenissen 1 en 2 plaatsvinden. Voor waarnemer W zijn de plaatscoördinaten hiervan x_1 en x_2 en de tijdcoördinaten t_1 en t_2. We definiëren het plaatsverschil Δx en tijdverschil Δt tussen beide gebeurtenissen als volgt.

$\Delta x = x_2 - x_1$ en $\Delta t = t_2 - t_1$.

Op dezelfde manier is voor waarnemer W' het plaatsverschil en tijdverschil tussen beide gebeurtenissen:

$\Delta x' = x_2' - x_1'$ en $\Delta t' = t_2' - t_1'$.

Eenvoudig is te bewijzen dat de lorentztransformatie ook toepasbaar is op plaats- en tijd<u>verschillen</u> van de ene naar de andere waarnemer. Zo geldt voor de transformatie van Δx en Δt naar Δx' en Δt':

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{en} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v \cdot \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Tijdsduurrek

Een raket beweegt met snelheid v langs waarnemer W. Waarnemer W' zit in de raket. Voor hem is de tijd tussen twee opeenvolgende slagen van zijn hart Δt'. We noemen Δt' de 'eigen tijd'. Voor hem vinden de hartslagen op dezelfde locatie plaats. Dus geldt Δx' = 0. Voor waarnemer W is de tijdsduur tussen de twee hartslagen Δt. De formule:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v \cdot \Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

wordt dan:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Kennelijk is Δt altijd groter dan Δt' en wel des te groter naarmate W sneller ten opzichte van W' beweegt. Dit verschijnsel heet tijdsduurrek of tijddilatatie.

Lengtekrimp (lorentzcontractie)

Een raket beweegt met snelheid v langs waarnemer W. Waarnemer W' zit in de raket en voor hem heeft de raket de lengte L'. We noemen L' de 'eigenlengte'. Waarnemer W meet op één en hetzelfde moment (althans voor hem!) de afstand L tussen de voor- en achterzijde van de raket. Dus gelden Δx = L en Δt = 0. De formule

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

wordt dan:

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

en dus:

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ .$$

Kennelijk is L altijd kleiner dan L’ en wel des te kleiner naarmate W sneller ten opzichte van W’ beweegt. Dit verschijnsel heet lengtekrimp of lorentzcontractie.